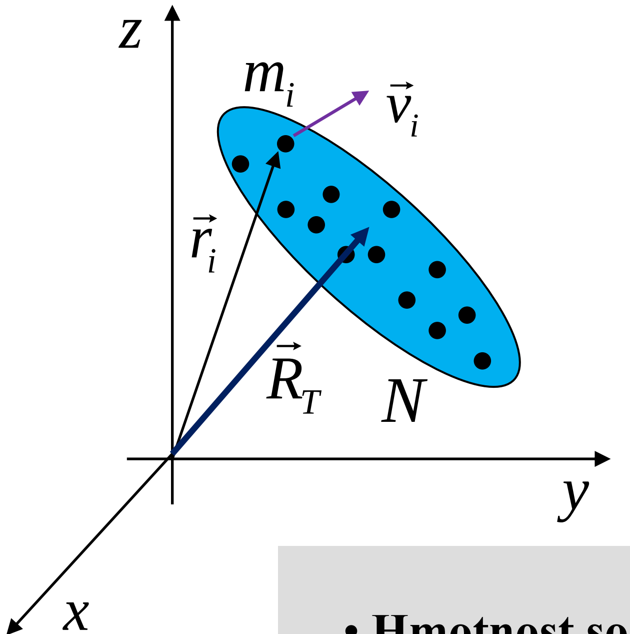
Opakování - Soustava hmotných bodů

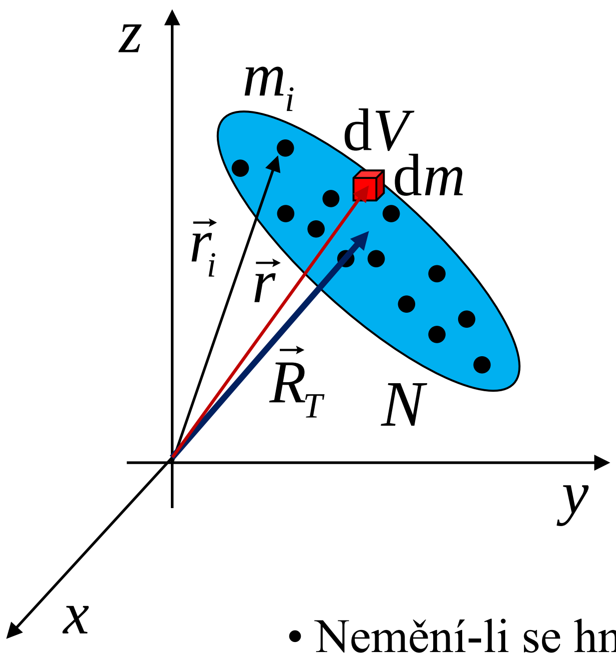


- Soustava N částic,
  např. molekuly plynu v uzavřené nádobě
- Poloha i-tého bodu: $\vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z$
- Rychlost, hybnost i-tého bodu: $\vec{v}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$
- Zrychlení i-tého bodu: $\vec{a}_i = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}$

- **Hmotnost soustavy hmotných bodů:** $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- **Hmotný střed (těžiště):** $\vec{R}_T \equiv \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$

$$X_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad Z_T \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$$

Opakování - Soustava hmotných bodů



- Volná soustava hmotných bodů. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné 3N souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má **3N stupňů volnosti.**
- Tuhá soustava hmotných bodů. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = konst., \quad \rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

$$X_T \equiv \frac{1}{M} \int_V x \rho \mathrm{d}V, \quad Y_T \equiv \frac{1}{M} \int_V y \rho \mathrm{d}V, \quad \frac{1}{M} \int_V z \rho \mathrm{d}V$$

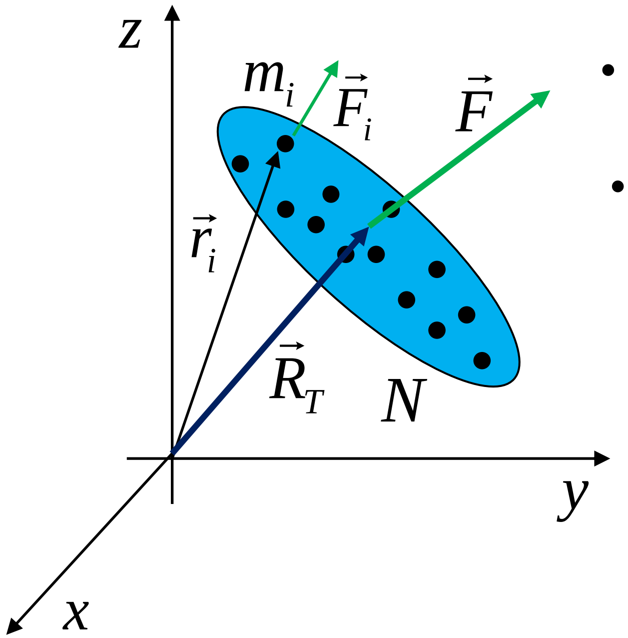
- Nemění-li se hmotnosti jednotlivých hmotných bodů s časem, potom **rychlost hmotného středu soustavy**:

$$\vec{v}_T = \frac{\mathrm{d}\vec{R}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

- Pro **celkovou hybnost soustavy hmotných bodů**:

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = M \vec{v}_T}$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



• Síla působící na i-tý hmotný bod : $\vec{F}_i$

• Sílu která nám působí na i-tý hmotný bod si můžeme představit složenou ze dvou výslednic:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \vec{F}_i^{\,I}$$

výslednice **vnějších sil** působících na *i*-tý bod

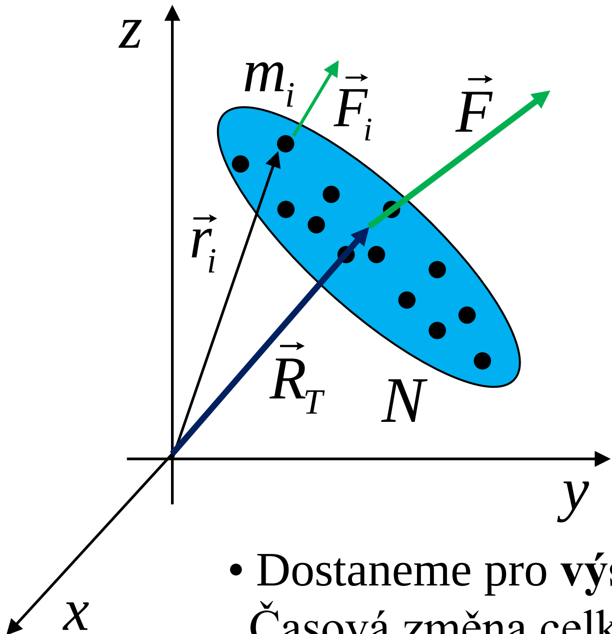
vnitřní síly, kterými působí všechny hmotné body soustavy na *i*-tý bod

• Pro výslednici vnitřních sil platí: $$\vec{F}_i^{\,I} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}^{\,I}, \quad \vec{F}_{ii}^{\,I} = 0$$

• Podle 2. Newtonova zákona je **výsledná síla** působící na soustavu:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \vec{F}_i^{\,E} + \sum_i^N \sum_j^N \vec{F}_{ij}^{\,I} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Podle 3. Newtonova zákona platí:

$$\vec{F}_{ij}^{\,I} = -\vec{F}_{ji}^{\,I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N}\vec{F}_{ij}^{\,i} = 0$$

- Uvážíme-li:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

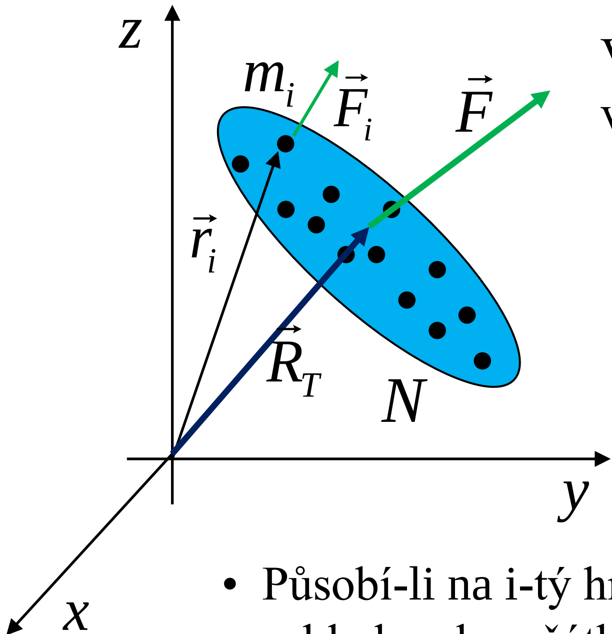
- Dostaneme pro **výslednou síla** působící na soustavu tzv. **1. větu impulzovou**: „Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovná výslednici vnějších sil působících na soustavu a má s ní stejný směr.“

$$\vec{F} = \sum_{i}^{N}\vec{F}_i^{\,E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}_T}{\mathrm{d}t^2}$$

- Pro konečný časový interval (t_1, t_2) dostaneme integrací:

$$\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_T = konst.}$$

- **Zákon zachování hybnosti:**

„Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se nemění.“

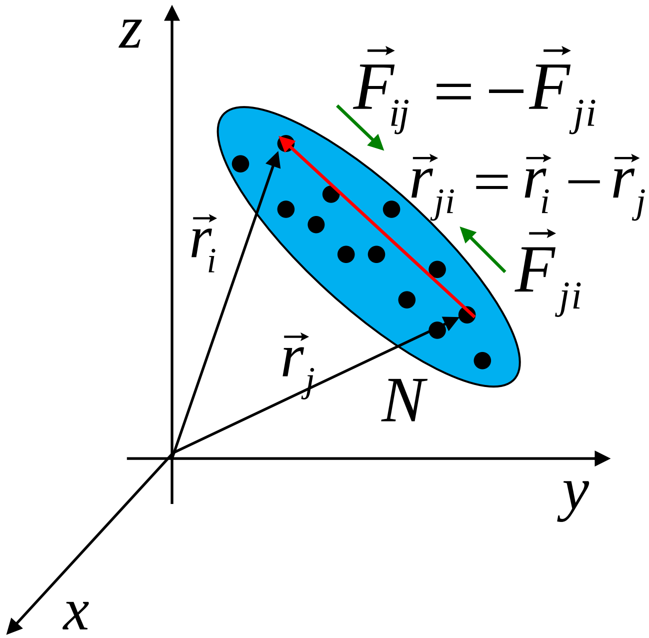
- Působí-li na i-tý hmotný bod síla $\vec{F}_i$ pak moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadné je:

$$\vec{M}_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

- Pro celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^I + \vec{F}_i^E\right)\right] = \boxed{\vec{M}^I + \vec{M}^E}$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro moment vnitřních sil vzhledem k počátku soustavy souřadné dostaneme:

$$\vec{M}^{I} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{I} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right]$$

- Uděláme trik:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left(\left[\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \right] + \left[\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] \right)$$

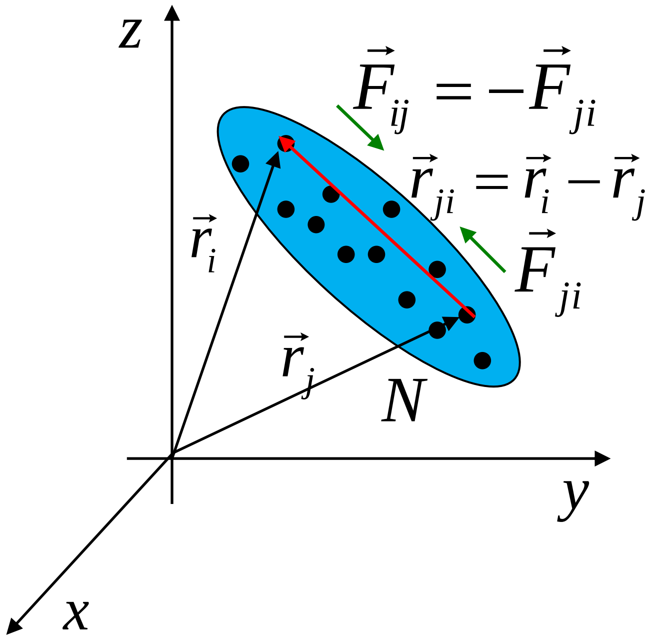
- A pro moment vnitřních sil dostaneme:

$$\vec{M}^{I} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij} \right] = 0, \quad \textit{protože} \quad \vec{r}_{ji} \,//\, \vec{F}_{ij}$$

- Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je tedy roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\vec{M} = \vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E} \right]$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



- Pro i-tý hmotný bod tedy platí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right] = M_i = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right]$$

- Pro celou soustavu poscítáme přes všechny hmotné body:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\vec{b}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i = \vec{M}$$

- Dostaneme **2. větu impulzovou**:

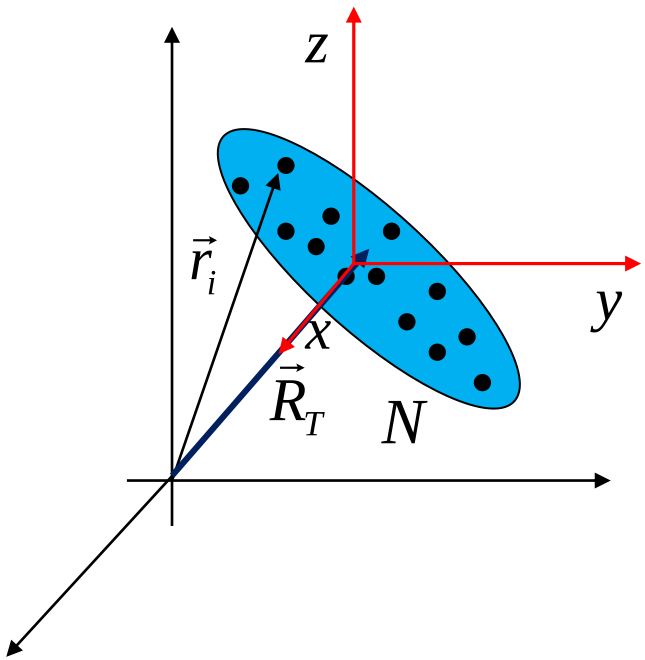
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}}$$

„Součet momentů vnějších sil působících na jednotlivé hmotné body soustavy je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.“

- Integrací můžeme upravit na tvar:

$$\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_{t_1}^{t_1} \vec{M}\,\mathrm{d}t$$

Opakování - Soustava hmotných bodů – pohybové rovnice



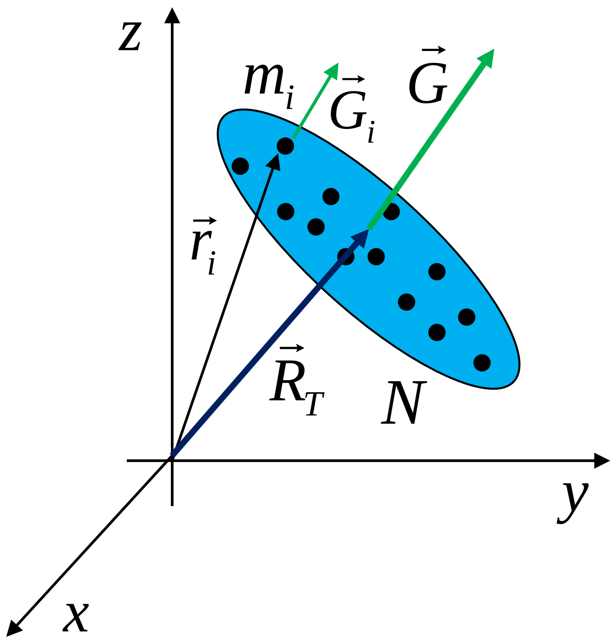
- Když za počátek soustavy souřadné zvolíme hmotný střed (těžiště) soustavy:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}_T = 0$$

- dá se ukázat, že 2. věta impulzová platí i pokud vztahujeme moment hybnosti a moment síly vůči hmotnému středu soustavy:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}_s}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_s$$

Soustava hmotných bodů – Těžiště



- Hmotný střed bývá ekvivalentně nazýván **těžištěm**.

Tento název je odvozen z působení homogenního tíhového pole na soustavu:

$$\vec{F} = \vec{F}^{E} = \sum_{i}^{N} \vec{G}_i = \sum_{i}^{N} m_i \vec{g}$$

- Celkový moment sil vzhledem k počátku soustavy souřadné je tedy roven výslednici momentů vnějších sil:

$$\vec{M} = \vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{g}\right] = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g}\right]$$

- Uvážíme-li definici hmotného středu:

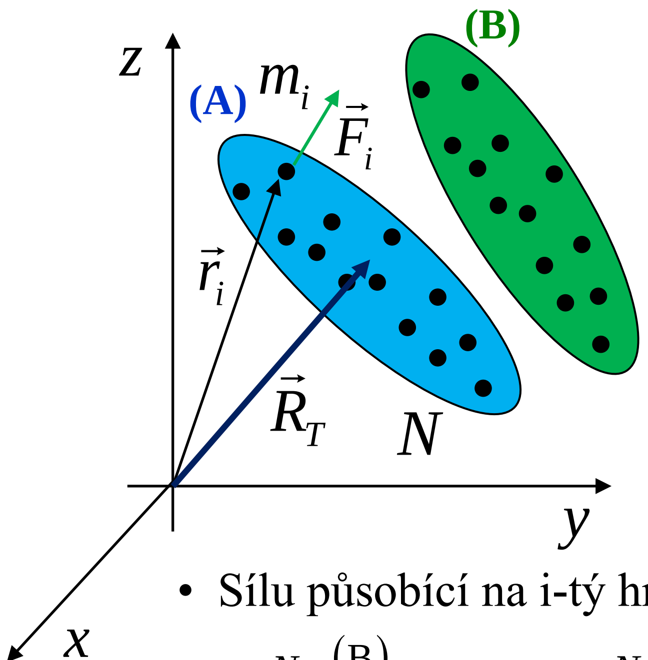
$$\vec{R}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

- Výsledný moment homogenní tíhové síly působící na soustavu hmotných bodů je roven:

$$\vec{M} = \left[M \vec{R}_T \times \vec{g}\right] = \left[\vec{R}_T \times M \vec{g}\right] = \left[\vec{R}_T \times \vec{G}\right]$$

- Hmotný střed - **těžiště** je působištěm homogenní tíhové síly.

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



• Předpokládejme, že soustava hmotných bodů přejde v důsledku působení sil z počátečního stavu **(A)** do konečného stavu **(B)**. Potom práce silového pole při takovém posuvu hmotných bodů je:

$$A = A_{\mathrm{BA}} = \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{r}_i = E_K^{(\mathrm{B})} - E_K^{(\mathrm{A})} = \Delta E_K$$

• kde kinetickou energií se rozumí součet kinetických energií hmotných bodů soustavy :

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

• Sílu působící na i-tý hmotný bod můžeme rozdělit na výslednici vnitřních a vnějších sil:

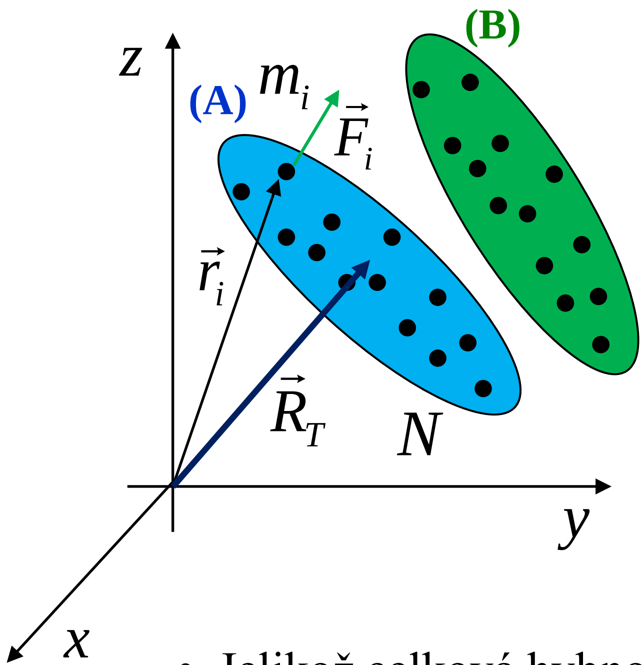
$$A = \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,I} \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,E} \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_{ij} \mathrm{d}\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} \vec{F}_i^{\,E} \mathrm{d}\vec{r}_i = A^I + A^E$$

• Změna kinetické energie soustavy hmotných bodů je tedy rovna práci vykonané vnitřními a vnějšími silami:

$$\Delta E_K = E_K^{(\mathrm{B})} - E_K^{(\mathrm{A})} = A^I + A^E$$

• Kinetickou energii soustavy hmotných bodů ovlivňují jak vnější, tak vnitřní síly. Vnitřní síly ovlivňují ale jen volnou soustavu, protože v tuhé soustavě se vzdálenosti mezi hmotnými body nemění a vnitřní síly tedy nekonají práci.

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



• Pro rychlost i-tého hmotného bodu vůči hmotnému středu (těžišti) soustavy platí (Galileova transformace):

$$\vec{v}_{iT} = \vec{v}_i - \vec{v}_T$$

• kinetickou energii hmotných bodů soustavy můžeme upravit:

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_T + \vec{v}_{iT}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} v_T^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{v}_T \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{iT} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{iT}^2$$

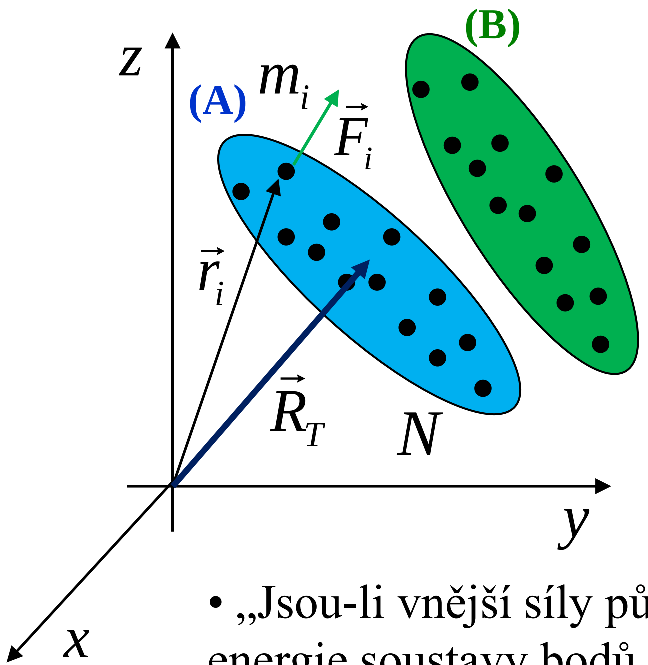
• Jelikož celková hybnost hmotných bodů je vůči hmotnému středu (těžišti) nulová, tak:

$$E_K = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{iT}^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + E_K^I$$

• Kinetickou energii pohybu hmotných bodů soustavy vůči jejímu hmotnému středu nazýváme **vnitřní kinetickou energií** soustavy hmotných bodů.

„Celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie hmotného středu a vnitřní kinetické energie soustavy" – **Königova věta**

Soustava hmotných bodů – kinetická a potenciální energie



- Jsou-li vnější i vnitřní síly působící na soustavu konzervativní, je práci A vykonanou na systém možno vyjádřit jako úbytek potenciální energie mezi místy **(A)** a **(B)**:

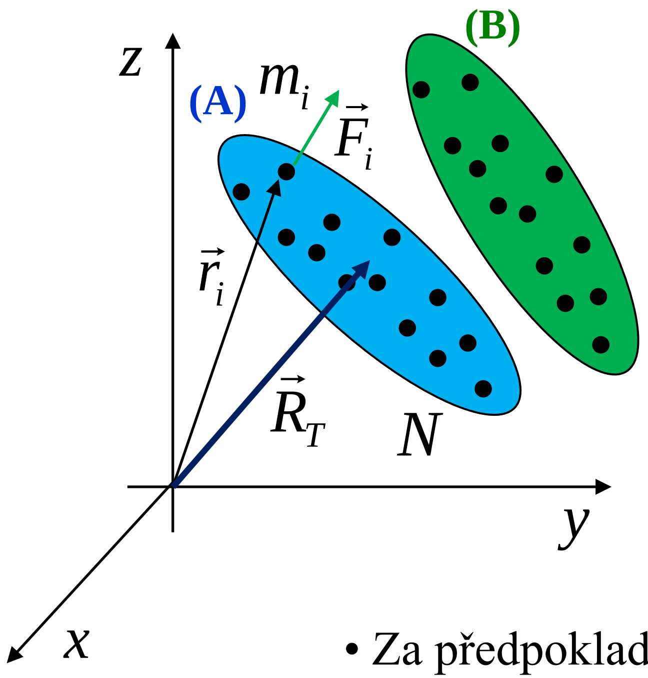
$$A = A_{\mathrm{BA}} = E_P^{(\mathrm{A})} - E_P^{(\mathrm{B})}$$

- a pro celkovou mechanickou energii soustavy hmotných bodů dostaneme **zákon zachování mechanické energie**:

$$E = E_K^{(\mathrm{A})} + E_P^{(\mathrm{A})} = E_K^{(\mathrm{B})} + E_P^{(\mathrm{B})} = konst.$$

- „Jsou-li vnější síly působící na těleso konzervativní, je součet potenciální a kinetické energie soustavy bodů konstantní. “

Izolovaná soustava hmotných bodů



• **Izolovanou soustavou hmotných bodů** rozumíme takovou soustavu, která není vystavena působení externích sil:

$$F_i^E = 0$$

• V případě izolované soustavy hmotných bodů je výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová a z 1. věty impulzové dostáváme **zákon zachování hybnosti**:

$$\vec{F} = \sum_i^N \vec{F}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{v}_T = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = konst.$$

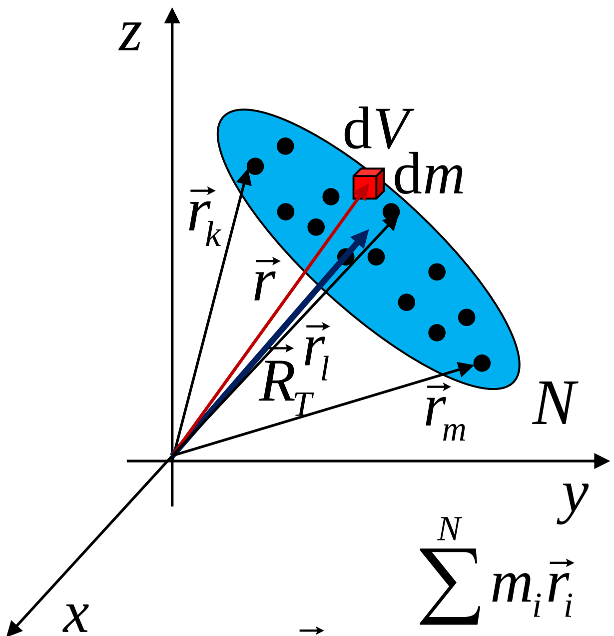
• Za předpokladu, že se hmotnost soustavy hmotných bodů nemění dostaneme:

$$\vec{v}_T = konst.$$

• Za předpokladu, že je celkový moment sil působících na soustavu nulový, dostáváme z 2. věty impulzové **zákon zachování momentu hybnosti**:

$$\vec{M} = \sum_i^N \vec{M}_i^E = 0 = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{b}_i = konst.$$

Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- **Volná soustava hmotných bodů**. Polohové vektory jsou nezávislé a k určení polohy je nutné 3N souřadnic.
- Volná soustava hmotných bodů má **3N stupňů volnosti.**
- **Tuhá soustava hmotných bodů**. Vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body se nemění:

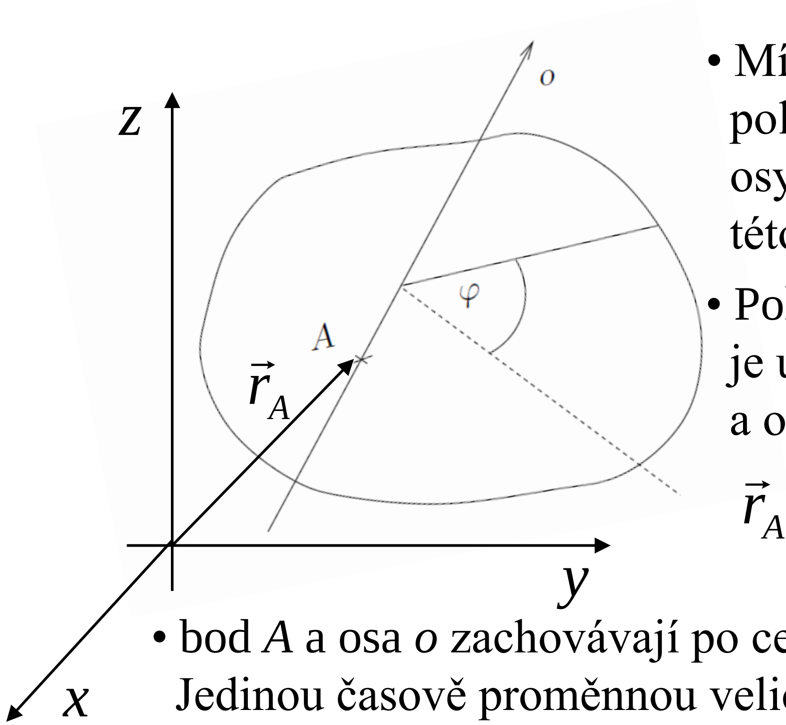
$$\left|\vec{r}_{ij}\right| = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = konst., \quad \rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{m}{V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

$$\vec{R}_T \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \equiv \frac{\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V}{\int_V \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho\,\mathrm{d}V, \quad kde \quad \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_V \mathrm{d}m = M$$

- Udáním poloh tří hmotných bodů v tuhé soustavě, které neleží na jedné přímce je jednoznačně určena poloha všech bodů soustavy. Tři polohové vektory mají devět souřadnic, ale musí splňovat tyto tři rovnice:

$$d_{kl} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_l\right|, \quad d_{km} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_m\right|, \quad d_{lm} = \left|\vec{r}_l - \vec{r}_m\right| \quad \Rightarrow \quad 6\ stup.volnosti$$

Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- Místo stanovení tří pevných bodů v tělese, můžeme určit polohu tělesa stanovením polohy jednoho bodu např. *A*, osy procházející tímto bodem a otočením tělesa kolem této osy.
- Poloha bodu *A* je určena třemi souřadnicemi, směr osy je určen jednotkovým vektorem, tedy dvěma údaji a otočení kolem osy jedním:

$$\vec{r}_A = (x, y, z), \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), kde\ |\vec{n}| = 1, \quad \varphi$$

- bod *A* a osa *o* zachovávají po celou dobu pohybu v tělese i prostoru stálou polohu. Jedinou časově proměnnou veličinou je úhel otočení a udáním jeho časové závislosti je pohyb určen :

$$\varphi = \varphi(t)$$

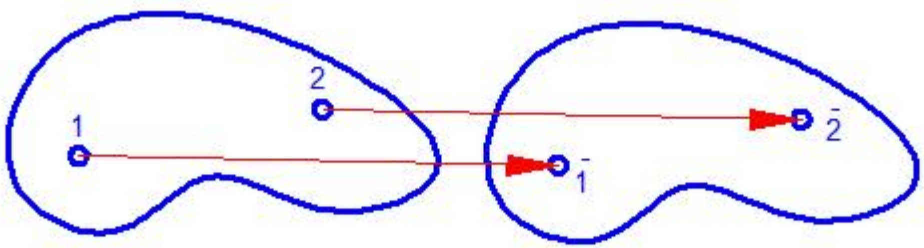
- Uvedený pohyb se nazývá **rotací tuhého tělesa kolem pevné osy**. Otáčí-li se těleso kolem pevné osy mají všechny body tělesa v každém okamžiku stejnou úhlovou rychlost a stejné úhlové zrychlení:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

Otáčení a posunutí

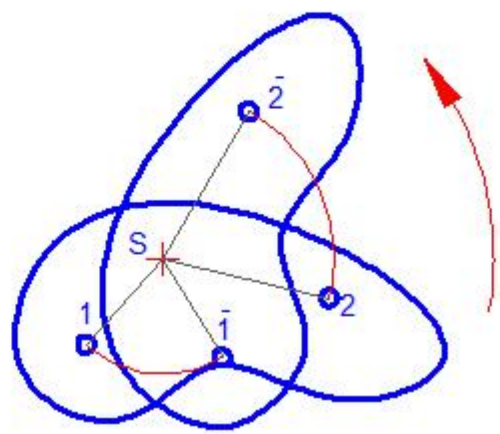
posunutí (translace)

- všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích

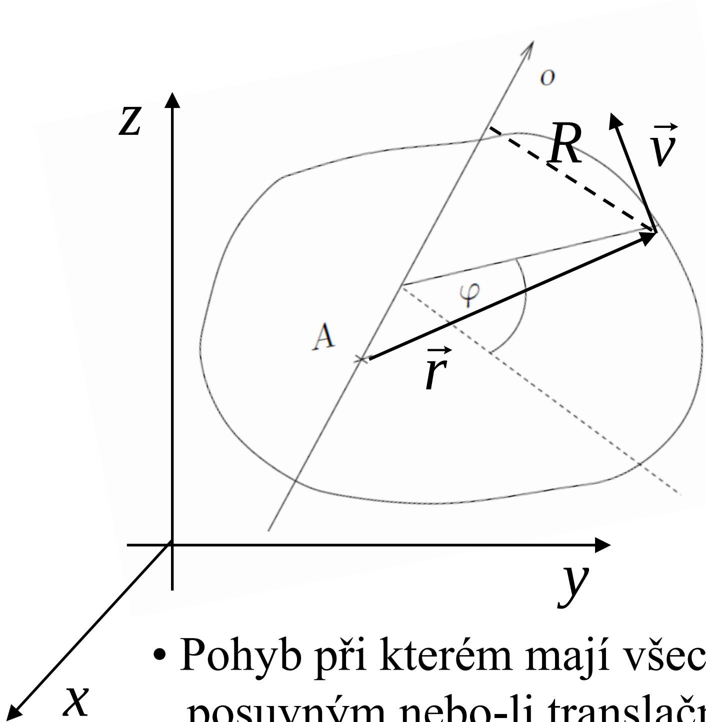


otočení (rotace)

- všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- 2) Obecnějším pohybem tuhého tělesa je pohyb, při kterém pouze jeden jeho bod *A* zachovává v tělese i prostoru stálou polohu. Tento pohyb nazýváme **rotací tuhého tělesa kolem pevného bodu**.
- Zavedeme vektor úhlové rychlosti, jehož směr je shodný s osou otáčení, která se může měnit s časem, pak podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa dána vzorcem :

$$\vec{v} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

- Pohyb při kterém mají všechny body tuhého tělesa stejný vektor rychlosti nazýváme posuvným nebo-li translačním pohybem: $\vec{v}_T = \vec{v}_T(t)$

- Podle **Chaslesovy věty** lze libovolný pohyb tuhého tělesa složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu. Rychlost libovolného bodu tuhého tělesa lze určit složením rychlosti jednoho libovolného bodu *A* tělesa a rychlosti dané otáčením kolem tohoto bodu:

$$v(t) = \vec{v}_T(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Pohyb tuhého tělesa

• Chaslesova věta (teorém)

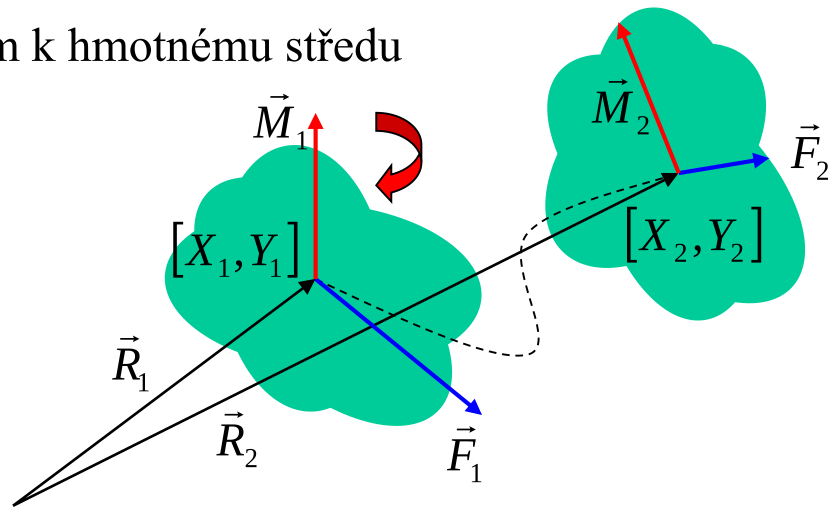
Libovolný pohyb tuhého tělesa lze složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu

• hmotný střed se pohybuje jako hmotný bod v němž se soustředěna celá hmotnost tělesa a na který působí výslednice všech vnějších sil

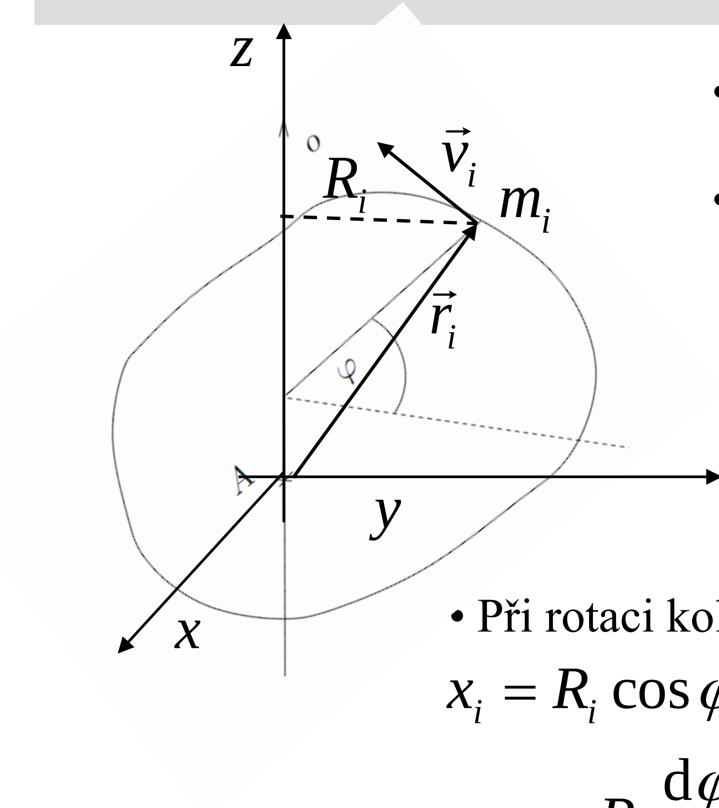
$$\vec{F}^{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_T = M\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$$ (1. impulsová věta)

• časová změna momentu hybnosti soustavy vzhledem k hmotnému středu je rovna výslednému momentu vnějších sil

$$\vec{M}^{E} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$ (2. impulsová věta)



Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Zvolíme soustavu souřadnou tak, že osa *z* bude totožná s osou otáčení *o*.
- Pohybovou rovnici získáme úpravou třetí složky 2. věty impulzové:

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$B_z = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right]_z = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i m_i v_{iy} - y_i m_i v_{ix}\right)$$

- Při rotaci kolem pevné osy se i-tý hmotný bod pohybuje po kružnici a tedy:

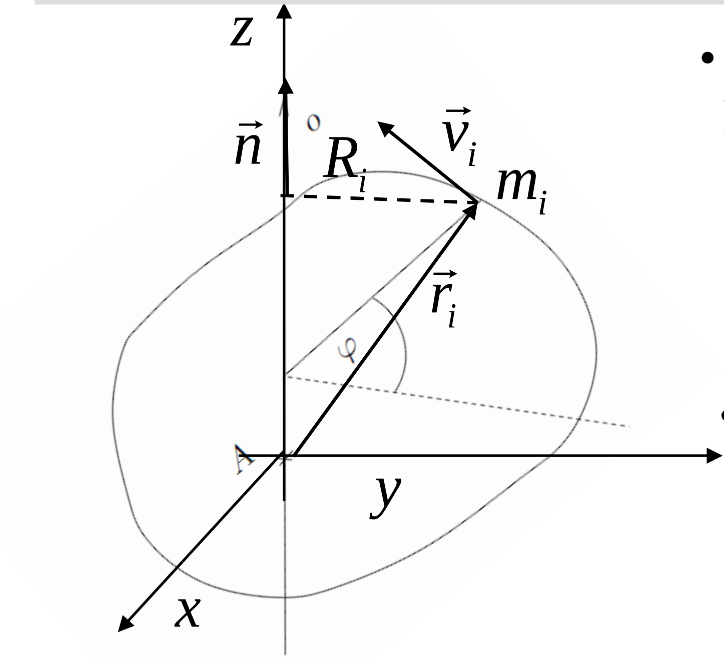
$$x_i = R_i \cos\varphi_i \qquad y_i = R_i \sin\varphi_i$$

$$v_{ix} = -R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \sin\varphi_i \qquad v_{iy} = R_i \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} \cos\varphi_i$$

- U tuhé soustavy hmotných bodů jsou úhlové rychlosti všech bodů stejné:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad B_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \omega J$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – moment setrvačnosti



- Jelikož jsou pro tuhou soustavu hmotných bodů vzdálenosti hmotných bodů od osy otáčení konstantní, můžeme definovat **moment setrvačnosti**:

$$J \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \equiv \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V$$

- Třetí složku pohybové rovnice můžeme tedy psát ve tvaru :

$$\frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_z = M_0$$

- Kde složku výsledného momentu vnějších sil do směru osy otáčení nazýváme **výsledným momentem vnějších sil vůči ose a** kde obecně:

$$M_0 = \vec{n}\cdot\vec{M} = n_x M_x + n_y M_y + n_z M_z$$

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E)$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevné osy – kinetická energie

- Vrátíme se ke **Königově větě -** celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu kinetické energie hmotného středu a vnitřní kinetické energie soustavy.

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{iT}^2 = \frac{1}{2} M v_T^2 + E_K^I$$

- Jestliže soustava (těleso) koná pouze posuvný pohyb. V tomto případě je rychlost všech bodů a tedy i těžiště stejná a kinetická energie:

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_T^2$$

- Jestliže se soustava (těleso) otáčí kolem pevné osy okamžitou úhlovou rychlostí ω potom pro kinetickou energii soustavy dostaneme:

$$v_i = R_i \omega \quad \Rightarrow \quad E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

- Soustava (těleso) koná obecný pohyb, který lze v každém okamžiku nahradit posuvným pohybem a rotací kolem osy procházející těžištěm:

$$E_K = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2$$

Analogie otáčení a posuvu

posunutí

- vzdálenost x o kolik se těleso posunulo
- rychlost $v = dx / dt$ $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
- zrychlení $a = d^2x / dt^2$ $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
- síla F $\quad \vec{F}$
- hybnost p $\quad \vec{p}$
- 2. Newtonův zákon $\quad \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$
- hmotnost $\quad m$
- kinetická energie $\quad E_K = \dfrac{1}{2} m v^2$
- 1. Impulsová věta $\quad \vec{F}^E = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

otočení

- úhel φ o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost $\omega = d\varphi / dt$ $\quad \vec{\omega} = \dfrac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$
- úhlové zrychlení $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$ $\quad \vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
- moment síly $M_z = x F_y - y F_x$ $\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- moment hybnosti $B_z = x p_y - y p_x$ $\quad \vec{B} = \vec{r} \times \vec{p}$
- 2. Newtonův zákon $\quad \vec{M} = \dfrac{d\vec{B}}{dt}$
- moment setrvačnosti $J = \sum_i m_i R_i^2 = \int_V R^2 \rho \mathrm{d}V$
- kinetická energie $\quad E_K = \dfrac{1}{2} J \omega^2$
- 2. Impulsová věta $\quad \vec{M}^E = \dfrac{d\vec{B}}{dt}$